

Лекция 10

Тема. Интегральное исчисление функции одной переменной. Определенный интеграл.

План лекции:

- 1) Интегральные суммы Римана и определенный интеграл.
- 2) Суммы Дарбу и их свойства.
- 3) Условия существования определенного интеграла. Классы интегрируемых функций.
- 4) Свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем значении.
- 5) Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
- 6) Замена переменной в определенном интеграле.
- 7) Интегрирование по частям в определенном интеграле.

§1. Интегральные суммы Римана и определенный интеграл.

Пусть

функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$ (где $a < b$). Произвольное разбиение сегмента $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) будем обозначать символом $T[a, b]$ или просто T . Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i и составим сумму:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I(x_i, \xi_i).$$

Число $I(x_i, \xi_i)$ называется *интегральной суммой* функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению $T[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

Геометрический смысл суммы $I(x_i, \xi_i)$ очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ (см. рис.) (если $f(x) \geq 0$).

Введем обозначение $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$.

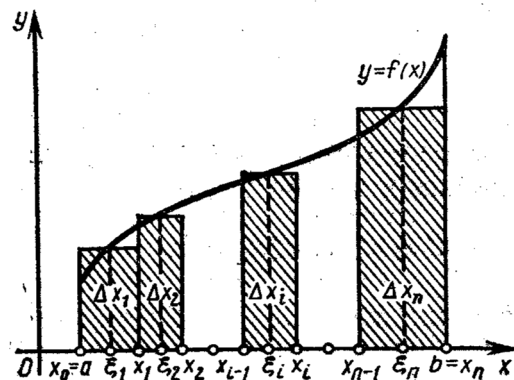
Определение. Число I называется *пределом интегральных сумм* $I(x_i, \xi_i)$ при $\Delta \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для всякого разбиения $T[a, b]$, у которого $\Delta < \delta$, выполняется неравенство $|I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$ при любом выборе промежуточных точек ξ_i на $[x_{i-1}, x_i]$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой (по Риману)* на сегменте $[a, b]$, если существует $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = I$.

При этом число I называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по сегменту $[a, b]$ и обозначается так:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, отрезок $[a, b]$ – *областью (отрезком) интегрирования*.



§2. Суммы Дарбу и их свойства.

Пусть $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$. Для произвольного разбиения $T[a, b]$ введем обозначения $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ и составим суммы:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Числа s и S называются *нижней* и *верхней суммами* (суммами Дарбу), соответствующими данному разбиению $T[a, b]$.

Очевидно, что для фиксированного разбиения $T[a, b]$ и любого выбора промежуточных точек на этом разбиении $s \leq I(x_i, \xi_i) \leq S$.

Приведем свойства сумм Дарбу.

1°. Для любого фиксированного разбиения

$$s = \inf_{\substack{\text{по всем} \\ \text{наборам} \\ \text{точек } \xi_i}} \{I(x_i, \xi_i)\}, \quad S = \sup_{\substack{\text{по всем} \\ \text{наборам} \\ \text{точек } \xi_i}} \{I(x_i, \xi_i)\}.$$

2°. Если разбиение T_2 получено из разбиения T_1 добавлением нескольких новых точек (т. е. получено измельчением T_1), то нижняя сумма s_2 разбиения T_2 не меньше нижней суммы s_1 разбиения T_1 , а верхняя сумма S_2 разбиения T_2 не больше верхней суммы S_1 разбиения T_1 : $s_1 \leq s_2$, $S_2 \leq S_1$.

3°. Нижняя сумма произвольного разбиения не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.

4°. Пусть $\{s\}$ и $\{S\}$ — множества всевозможных нижних и верхних сумм для любых разбиений $[a, b]$. Числа

$$\bar{I} = \inf_{\substack{\text{по всем} \\ \text{разбиениям}}} \{S\}, \quad \underline{I} = \sup_{\substack{\text{по всем} \\ \text{разбиениям}}} \{s\}$$

называются соответственно *верхним* и *нижним интегралами Дарбу*.

Нижний интеграл Дарбу не превосходит верхнего: $\underline{I} \leq \bar{I}$.

5°. *Лемма Дарбу*:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \bar{I}, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} s = \underline{I}.$$

§3. Условия существования определенного интеграла.

Классы интегрируемых функций.

Сформулируем необходимые и достаточные условия интегрируемости.

Теорема 1. Для того чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{I} = \bar{I}$.

Теорема 2. Для того чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение $T[a, b]$ (хотя бы одно), для которого

$$S - s < \varepsilon. \quad (1)$$

Напомним, что число $\omega_i = M_i - m_i$ называется *колебанием функции* на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$.

Условие (1) можно записать в виде $S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

Справедливы следующие достаточные условия интегрируемости:

Теорема 3. *Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте.*

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$. Если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва $f(x)$ и имеющих сумму длин, меньшую ε , то $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$.*

Следствие. *Кусочно непрерывная функция (т. е. имеющая на сегменте $[a, b]$ конечное число точек разрыва I рода) интегрируема на этом сегменте.*

Теорема 5. *Монотонная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте.*

§4. Основные свойства определенного интеграла.

I. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt, \quad \text{где } x, t - \text{любые буквы.}$$

II. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

III. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный.

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

IV. Если промежуток интегрирования $[a, b]$ разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутке $[a, b]$, равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

V. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx;$$

VI. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx.$$

VII. Если $f(x) \leq \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$

VIII. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

IX. **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

X. **Обобщенная теорема о среднем.** Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, и функция $\varphi(x)$ знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε , такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

§5. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел $a = \text{const}$, а верхний предел b изменяется.

Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла. Обозначим $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Данный интеграл называется интегралом с переменным верхним пределом.

При этом производная функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x равна

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогично можно ввести понятие интеграла с переменным нижним пределом.

Теорема. Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл. Одной из первообразных является функция $\Phi(x)$.

Основной формулой интегрального исчисления является так называемая формула Ньютона-Лейбница, которая представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Теорема (Ньютона – Лейбница). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a, b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ (формула Ньютона–Лейбница)}$$

Иногда применяют обозначение $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Нахождение определенных интегралов с использованием формулы Ньютона–Лейбница осуществляется в два шага: на первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$; на втором применяется собственно формула Ньютона-Лейбница – находится приращение первообразной, равное искомому интегралу. Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона – Лейбница можно использовать любую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например имеющую наиболее простой вид при $C=0$.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x^2 dx$

Решение. Произвольная первообразная для функции $f(x)=x^2$ имеет вид

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C.$$

Для нахождения интеграла по формуле Ньютона – Лейбница возьмем такую первообразную, у

которой $C=0$. Тогда $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

Пример 2. $\int_1^2 2^{3x-4} dx = \left(\frac{1}{3 \ln 2} 2^{3x-4} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3 \ln 2} (2^{3 \cdot 2 - 4} - 2^{3 \cdot 1 - 4}) = \frac{1}{3 \ln 2} \left(4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6 \ln 2}$

Пример 3. Вычислить $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$.

Решение. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = \int_0^8 \sqrt{2x} dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^8 + \frac{x^{4/3}}{4/3} \Big|_0^8 = \frac{1}{3} (16)^{3/2} + \frac{3}{4} (8)^{4/3} = 33 \frac{1}{3}.$

§6. Замена переменной в определенном интеграле.

При вычислении определенных интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница предпочтительно жестко не разграничивать этапы решения задачи (нахождение первообразной подынтегральной функции, нахождение приращения первообразной). Такой подход, использующий, в частности, формулы замены переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла, обычно позволяет упростить запись решения.

Теорема. Пусть функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ и функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке x из $[a, b]$ вида $x=\varphi(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

При этом $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Эта формула носит название **формулы замены переменной** (или **подстановки**) в определенном интеграле. Подобно тому, как это было в случае неопределенного интеграла, использование замены переменной позволяет упростить интеграл, приблизив его к табличному (табличным). При этом в отличие от неопределенного интеграла в данном случае нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования. Достаточно лишь найти пределы интегрирования α и β по новой переменной t как решение относительно переменной t уравнений $\varphi(t)=a$ и $\varphi(t)=b$. На практике, выполняя замену переменной, часто начинают с того, что указывают выражение $t=\psi(x)$ новой переменной через старую. В этом случае нахождение пределов интегрирования по переменной t упрощается: $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$. То есть, заменяя переменную интегрирования надо не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Пример 4. Вычислить $\int_0^1 x \cdot (2 - x^2)^5 dx$

Решение. Положим $t=2-x^2$. Тогда $dt=d(2-x^2)=(2-x^2)'dx=-2x dx$ и $x dx = -\frac{1}{2} dt$. Если $x=0$, то $t=2-0^2=2$, и если $x=1$, то $t=2-1^2=1$. Следовательно,

$$\int_0^1 x \cdot (2 - x^2)^5 dx = \int_2^1 t^5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) dt = -\frac{1}{2} \int_2^1 t^5 dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{t^6}{6} \right) \Big|_2^1 = -\frac{1}{12} \cdot \left(1^6 - 2^6 \right) = -\frac{1}{12} \cdot (1 - 64) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$$

Пример 5. Вычислить $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$

Решение. Воспользуемся заменой переменной $t = \sqrt{1+3x}$. Тогда $x = \frac{t^2-1}{3}$ и $dx = \frac{2}{3}t dt$. Если $x=0$, то $t=1$ и, если $x=5$, то $t=4$. Выполняя замену, получим:

$$\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2 - 1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3} \Big|_1^4 - t \Big|_1^4 \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{64-1}{3} - 4 + 1 \right) = 4$$

Пример 6. Вычислить $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.

Решение. Положим $t=e^x$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$ и, если $x=\ln 2$, то $t=2$, если $x=\ln 3$, то $t=3$.

Выполняя замену, получаем: $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int_2^3 \frac{dt}{t(t - t^{-1})} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

Пример 7.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция $\sin t$) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример 8. $\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую

подстановку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)} = \{ \tan x = t \} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т. е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная $\tan x$ имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке $x = \pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий замены.

§4. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Теорема. Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда справедлива **формула интегрирования по частям**:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad \text{где} \quad uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Пример 9. Вычислить $\int_0^1 \ln(1+x) dx$.

Решение. Пусть $u = \ln(1+x)$, $dv = dx$ Тогда $du = d(\ln(1+x)) = (\ln(1+x))' dx = \frac{dx}{1+x}$ и

$v = \int dv = \int dx = x$. Применяя формулу, получаем $\int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{dx}{1+x}$. Для

нахождения полученного интеграла положим $1+x=t$. Тогда $dx=dt$, $x=t-1$ и если $x=0$, то $t=1$, если $x=1$, то $t=2$. Следовательно,

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = x \cdot \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_1^2 \frac{t-1}{t} dt = \ln 2 - \int_1^2 dt + \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2 - t \Big|_1^2 + \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - (2-1) + \ln 2 - \ln 1 = \ln 4 - 1$$

Пример 10. Вычислить $\int_1^2 x e^x dx$.

Решение. Положим $u = x$, $dv = e^x dx$, отсюда $du=dx$, $v=e^x$ и по формуле имеем:

$$\int_1^2 x e^x dx = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = \left[e^x (x-1) \right]_1^2 = e^2$$

Пример 11. Вычислить $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

Решение.

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 12. Вычислить $\int_1^e x \ln^2 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int_1^e x \ln^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 - 1). \end{aligned}$$